8

RESOLUÇÕES

FUNÇÃO EXPONENCIAL, PG E JUROS COMPOSTOS.

QUESTÃO 01

O outro ângulo agudo do triângulo é 60º.

$$\text{sen}\, C\hat{B}A = \frac{L_2}{L_1} \Leftrightarrow \frac{L_2}{L_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Procedendo de forma análoga, concluímos que

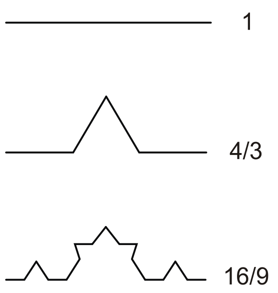
$$\frac{L_3}{L_2} = \frac{L_4}{L_3} = \cdots = \frac{L_9}{L_8} = \cdots = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{L_3}{L_2} \cdot \ldots \cdot \frac{L_9}{L_8} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8 \Leftrightarrow \frac{L_9}{L_1} = \frac{81}{256}.$$

Letra C

QUESTÃO 02



Os comprimentos das figuras formam uma P.G. de razão 4/3. Logo, o comprimento da sexta figura será dado por:

$$a_6 = 1.\left(\frac{4}{3}\right)^5 = \left(\frac{4}{3}\right)^5.$$

Letra C

QUESTÃO 03

Como (x, 4, y e z) é uma PG, temos x.y = 16 e $y^2 = 4.z$.
Como (x, y, z – 2) é uma PA, temos que 2.y = x + z – 2.
x = 16/y
2.y = 16/y + z – 2
$2.y^2 = 16 + (z – 2).y$
2.(4.z) = 16 + (z – 2).y
8.z – 16 = (z – 2) .y
8.(z – 2) = (z – 2).y
y = 8
$8^2 = 4.z$
z = 16
Letra C

QUESTÃO 04

É fácil ver que o número de quadrados pretos que restam após a n-ésima iteração é dado por 8^n. Portanto, após a terceira iteração, o número de quadrados pretos que restam é igual a $8^3 = 512$.
Letra B

QUESTÃO 05

Seja V a capacidade da caixa d'água. Supondo que o reservatório se encontra inicialmente cheio, segue que:
$(1/5)^4.V = 0,12$
$V = 0,12.5^4$
$V = 75\ m^3 = 75.000$ mL
Letra D

QUESTÃO 06

Sabemos que no primeiro dia o raio da mancha era de 1 m.
Se o aumento verificado no 1º dia é de 1m, então o aumento no 2º dia será de 1/5 m. Assim, o raio da mancha, a cada dia, é dado pelos termos da série:
1, 1 + 1/5, 1 + 1/5 + 1/25, ...
Portanto, a medida do raio da mancha no 10º dia é a soma dos termos de uma PG:

$$\frac{a_1.(1-q^n)}{1-q} = \frac{1.(1-(\frac{1}{5})^{10})}{1-\frac{1}{5}} = \frac{\frac{5^{10}-1}{5^{10}}}{\frac{4}{5}} = \frac{5^{10}-1}{4.5^9}$$

Letra B

QUESTÃO 07

2009: 1 dm
2010:
2011: 2,5 m = 25 dm
Temos então três termos em PG, determinando sua razão, temos:
$25 = 1 \cdot q^{3-1}$
$25 = q^2$
q = $\pm$5
q = 5.
Portanto, a razão de crescimento anual no período de 2 anos foi 5.
Letra C

QUESTÃO 08

Os comprimentos das faixas constituem uma progressão geométrica infinita, sendo a_1 = m o primeiro termo, q = 2/3 a razão.
Portanto, a soma dos comprimentos de todas as faixas é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{m}{1-\frac{2}{3}} = 3m$$

Letra A

QUESTÃO 09

Seja C_n o comprimento da trajetória.

Temos:

$$C_n = \pi.R + \frac{\pi.R}{2} + \frac{\pi.R}{4} + \frac{\pi.R}{8} + \cdots = \frac{a_1}{1-q}$$
$$= \frac{\pi.R}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi.R}{\frac{1}{2}} = 2.\pi.R$$

Letra E

QUESTÃO 10

$M = C.(1 + i)^n$

$2.C = C.(1 + i)^{10}$

$(1 + i)^{10} = 2$

$1 + i = 2^{0,1}$

1 + i = 1,0718

i= 0,0718 = 7,18%

Letra D

QUESTÃO 11

Seja q a quantidade inicial de coelhos. A quantidade de coelhos cresceu segundo uma progressão geométrica de razão igual a 2. Logo, após 12 meses, a quantidade de coelhos é igual a 8.q.

A quantidade a ser vendida corresponde a 8.q − q = 7.q coelhos ou 7/8 = 0,875 = 87,5% da quantidade atual.

Letra E

QUESTÃO 12

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{7}{1-0,8} = \frac{7}{0,2} = 35$$

Letra B

QUESTÃO 13

Na PA:

2.A = B + 3

B = 2.A – 3

Na PG:

$(A - 6)^2 = 3.B$

$A^2 - 12.A + 36 = 3.(2.A - 3)$

$A^2 - 18.A + 45 = 0$

A’ = 3 ou A” = 15

B’ = 3 ou B” = 27

Letra B

QUESTÃO 14

$$\frac{a_1.(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}.\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

Letra A

QUESTÃO 15

1º dia: 345

2º dia: 3x345

3º dia: 3x3x345

4º dia: 3x3x3x345 = 3^3x345

Letra C

QUESTÃO 16

Após as construções indicadas, encontramos

$$(L_1,\ L_2,\ L_3,\ \ldots) = \left(L_1,\ L_1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},\ L_1\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2,\ \ldots\right) \text{ e}$$

$$(A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots) = \left(L_1^2,\ L_1^2\cdot\frac{1}{2},\ L_1^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \ldots\right).$$

Desse modo, podemos concluir que ambas são progressões geométricas com razões distintas: a primeira com razão igual a $\sqrt{2}/2$ e a segunda com razão igual a 1/2.

Letra C

QUESTÃO 17

$$n^{\frac{1}{3}}.n^{\frac{1}{9}}.n^{\frac{1}{27}}.n^{\frac{1}{81}}\ldots. = n^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots} = n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\text{, pois}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Letra D

QUESTÃO 18

O número de antepassados, em cada geração, constitui a progressão geométrica (2, 2^2, 2^3 ,2^4, ...). Assim, queremos calcular a soma dos quinze primeiros termos dessa sequência.

$$\frac{2.(2^{15}-1)}{2-1} = 2.(2^{15}-1)$$

Letra E

QUESTÃO 19

$$\frac{1.(2^{15}-1)}{2-1} = 2^{15} - 1 = 32767$$

32767 = 2x16000 + 767

Letra D

QUESTÃO 20

Seja q com q > 0 o fator constante de crescimento anual. Desse modo, vem:

$0,4 = 0,25.q^{20}$

$q = \sqrt[20]{1,6}$

Letra E

QUESTÃO 21

5 h 20 min = 320 min = 8 períodos de 40 min

S = 1 + 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 1458 + 4374

S =6561

Letra A

QUESTÃO 22

1 folha tem espessura 1 cm/100 = 0,01 cm

Etapas:

(0,02; 0,04; 0,08; ...)

$0,02.2^{n-1} = 20000$

$2^{n-1} = 20000/0,02$

$2^{n-1} = 1000000$

$2^{n-1} = 1000.1000$

$2^{n-1} = 2^{10}.2^{10}$

$2^{n-1} = 2^{20}$

n – 1 = 20

n = 21

Letra A

QUESTÃO 23

A duração das séries constitui uma PG, cujo primeiro termo é 25 e cuja razão é 1 + 0,28 = 1,28, isto é, $(25, 25.1,28^1; 25.1,28^2; ...; 25.1,28^{n-1})$

Sabendo que a duração da última série foi de 1 min e 40 s = 100 s. Temos:

$25.1,28^{n-1} = 100$

$1,28^{n-1} = 4$

$\log 1,28^{n-1} = \log 2^2$

(n – 1).log1,28 = 2.log2

log(1,28) = log(128/100)

$\log(128/100) = \log 2^7 - \log 10^2 = 7.\log 2 - 2\log 10$

log(128/100) = 2,10 – 2 = 0,10

n – 1 = 0,60/0,10

n = 6 + 1 = 7

7 séries de 20 totalizam 140.

Letra C

QUESTÃO 24

Considerando a P.A (100. 250, 400, ...), temos:

a_9 = 100 + 8.150 = 100 + 1200 = 1300

S_9 = (100 + 1300).9/2 = 6300

Considerando agora a P.G. (100, 200, 400, ...), temos:

100 + 200 + 400 + 800 + 1600 + 3200 = 6300

Portanto, receberia o dinheiro em 6 meses.

Letra B

QUESTÃO 25

$\frac{1.(2^9-1)}{2-1} = 2^9 - 1 = 511$ são necessárias para preencher 9 casas.

Como mais 1 inicia-se o preenchimento da 10ª casa.

511 + 1 = 512

Letra C

QUESTÃO 26

A sequência é uma P.G. infinita de razão = 1/2, vamos considerar A_1 seu primeiro termo e A_{10} seu décimo termo.

$$\frac{A_1}{1-\frac{1}{2}} = 64\sqrt{2} \Leftrightarrow A_1 = \frac{1}{2}.64\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$$

$$A_{10} = 32\sqrt{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

Letra A

QUESTÃO 27

S = 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 0,5 + 0,5 + ...

S = 4 + (4 + 2 + 1 + 0,5 + ...)

S = 4 + 4/(1 – 1/2) = 4 + 8 = 12

Letra A

QUESTÃO 28

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Letra C

QUESTÃO 29

$0,25 = (1 - 0,15)^t$

$0,25 = 0,85^t$

$\log 0,25 = \log 0,85^t$

t = log0,25/log0,85

log0,25 = log(25/100) = 2.log5 – 2.log10 = - 0,6

log0,85 = log(85/100) = log5 + log17 – 2.log10 = - 0,1

t = (-0,6)/(-0,1) = 6

Letra C

QUESTÃO 30
PA (6, 12, 18, 24, 30)
PG (6, 12, 24, 48, 96)
Letra D

QUESTÃO 31
$a_5 = a_0.q^5$
$2{,}43.10^5 = 1.10^3.q^5$
$q^5 = 243$
q =3
PG em milhares:
(1, 3, 9, 27, 81, 243)
Letra B

QUESTÃO 32
AB = 2
BC = x
CD = 2 – x
$x^2 = 2.(2 - x)$
$x^2 + 2.x - 4 = 0$
$x = \sqrt{5} - 1$
Teremos uma PG de razão $(\sqrt{5} - 1)/2$
$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{2}{1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \frac{4}{3 - \sqrt{5}} = 3 + \sqrt{5}$$
Letra D

QUESTÃO 33
$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{12}{1 - 0{,}8} = \frac{12}{0{,}2} = 60 \text{ metros}$$
Letra D

QUESTÃO 34
(1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096)
$4096 = 1.4^{n-1}$
$4^6 = 4^{n-1}$
n – 1 = 6
n = 7
Letra B

QUESTÃO 35
Atualmente 1.000.000 de litros.
Um ano antes, 500.000 de litros.
Dois anos antes, 250.000 de litros
Letra D

QUESTÃO 36
y = 3x
PA
(x, 3.x, 5.x, 7.x)
x + 3.x + 5.x + 7.x = 160
16.x = 160
x = 10
(10, 30, 50, 70)
PG
(10, 30, 90, 270)
t + u = 340
Letra B

QUESTÃO 37
A razão da PG é q = 5500/5000 = 1,1.
Em abril, 6050x1,1 = 6655
6655 – 5500 = 1155
Letra B

QUESTÃO 38
A PG tem termo geral na forma de uma exponencial.
Letra A

QUESTÃO 39
Como 1, y, y + 12 são termos consecutivos de uma PG, teremos:
$y^2 = y + 12$
$y^2 - y - 12 = 0$
y = 4 ou y = -3
Para y = 4
(1/4, 1, 4, 16, ...)
1 – 1/4 = 3/4
Para y = - 3
(-1/3, 1, -3, 9, ...)
-1/3 – 1 = -4/3
Letra D