9

RESOLUÇÕES

LOGARITMOS

QUESTÃO 01

Como 0,005 = 5.10^{-3} e 5 = 10/2, teremos:

$$pH = -\log[H^+] = -\log(5.10^{-3})$$
$$pH = -[\log 5 + \log 10^{-3}]$$
$$pH = -\left[\log\left(\frac{10}{2}\right) - 3.\log 10\right]$$
$$pH = -[\log 10 - \log 2 - 3.\log 10]$$
$$pH = -[1 - 0,3 - 3.1] = -[-2,3] = 2,3$$

Letra Ⓐ

QUESTÃO 02

Como queremos a razão entre as intensidades, podemos calcular a diferença entre os níveis sonoros, pois devemos lembrar que os logaritmos transformar quocientes em diferenças.

$$\begin{cases} B_{orquestra} = 10.\log\left(\frac{I_{orquestra}}{I_0}\right) = 90 \\ B_{conversa} = 10.\log\left(\frac{I_{conversa}}{I_0}\right) = 60 \end{cases}$$

Subtraindo uma equação da outra:

$$10.\log\left(\frac{I_{orquestra}}{I_0}\right) - 10.\log\left(\frac{I_{conversa}}{I_0}\right) = 30$$

Dividindo a equação por 10:

$$\log\left(\frac{I_{orquestra}}{I_0}\right) - \log\left(\frac{I_{conversa}}{I_0}\right) = 3$$
$$\log\left[\frac{\frac{I_{orquestra}}{I_0}}{\frac{I_{conversa}}{I_0}}\right] = 3$$
$$\log\left[\frac{I_{orquestra}}{I_0}.\frac{I_0}{I_{conversa}}\right] = 3$$
$$\log\left[\frac{I_{orquestra}}{I_{conversa}}\right] = 3 \rightarrow \frac{I_{orquestra}}{I_{conversa}} = 10^3$$
$$I_{orquestra} = 1000.I_{conversa}$$

Letra Ⓐ

QUESTÃO 03

$$Q = Q_0.e^{-k.t} \rightarrow Q = 10.e^{-k.t}$$
$$\ln Q = \ln[10.e^{-k.t}]$$
$$\ln Q = \ln 10 + \ln e^{-k.t}$$
$$\ln Q = \ln 10 - k.t.\ln e$$
$$k.t = \ln 10 - \ln Q \rightarrow t = \frac{\ln 10 - \ln Q}{k}$$

Letra Ⓐ

QUESTÃO 04

Se o bloco deve chegar totalmente derretido, então ao tocar no solo devemos ter M = 0.

$$M = 0 = 1000 - 250.\log_{10} d$$
$$250.\log_{10} d = 1000$$
$$\log_{10} d = \frac{1000}{250} = 4 \rightarrow \log_{10} d = 4 \rightarrow d = 10^4$$
$$d = 10.000 \text{ metros}$$

Substituindo d na outra expressão:

$$d = 10.t^2 \rightarrow 10.000 = 10.t^2 \rightarrow t^2 = 1000$$
$$t = \sqrt{1000} \approx 32 \text{ segundos}$$

Letra Ⓐ

QUESTÃO 05

A capitalização composta é a uma taxa de juros constante é dada pela expressão:

$$M = C.(1+i)^n$$

Teremos então:

$$\begin{cases} M_{João} = 40000.(1+0,10)^n \\ M_{Marcelo} = 50000.(1+0,06)^n \end{cases}$$

Igualando as duas expressões:

$$40000.(1+0,10)^n = 50000.(1+0,06)^n$$

Dividindo a igualdade por 10.000

$$4.(1,1)^n = 5.(1,06)^n \rightarrow \frac{(1,1)^n}{(1,06)^n} = \frac{5}{4}$$
$$\left(\frac{1,1}{1,06}\right)^n = \frac{5}{4} \rightarrow \log\left(\frac{1,1}{1,06}\right)^n = \log\left(\frac{5}{4}\right)$$
$$n.(\log 1,1 - \log 1,06) = \log 5 - \log 4$$
$$n.(0,04 - 0,025) = \log\left(\frac{10}{2}\right) - \log 2^2$$
$$n.(0,015) = \log 10 - \log 2 - 2.\log 2$$
$$n = \frac{1 - 0,3 - 0,6}{0,015} = \frac{0,1}{0,015} = \frac{100}{15} \approx 7 \text{ meses}$$

Letra Ⓒ

QUESTÃO 06

Vamos supor que a dívida de Juliana fosse R$ 10.000,00. Ele pagaria a cada parcela 20% do saldo devedor, ou seja, a cada parcela paga ela estaria devendo 80% do que devia no mês anterior. Temos então uma PG de razão 0,8 para o saldo devedor.

(10.000; 8.000; 6.400; 5.120; ...)

Ele pagará desta forma enquanto dever mais de 25% da dívida, no caso hipotético R$ 2.500,00.

Vamos determinar em quantas parcelas sua dívida atinge este valor.

$$M = C.(1+i)^n \rightarrow 2500 = 10000.(1-0,20)^n$$

Temos na verdade um decrescimento, por isso usamos a taxa como i = 0,20 = 20%

$$\frac{2500}{10000} = (0,80)^n \rightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{8}{10}\right)^n \rightarrow \log\left(\frac{1}{4}\right) = \log\left(\frac{8}{10}\right)^n$$
$$\log 1 - \log 4 = n.(\log 8 - \log 10)$$
$$-\log 2^2 = n.(\log 2^3 - \log 10)$$
$$-2.\log 2 = n.(3.\log 2 - \log 10)$$
$$-2.0,301 = n.(3.0,301 - 1)$$
$$-0,602 = n.(0,903 - 1) \rightarrow n = \frac{-0,602}{-0,097} \approx 6$$

Em 6 meses serão pagos 75% da dívida, sendo que os 25% restantes devem ser pagos de uma única vez, logo a dívida será paga em 7 meses.

Letra Ⓒ

QUESTÃO 07

Se a população de infectados cresce a 20% ao ano, então a partir de um valor inicial P_0, teremos uma PG de razão igual a 1,20.

$P = P_0.(1,20)^n$

Para duplicar, $P = 2.P_0$.

$2.P_0 = P_0.(1,20)^n \rightarrow (1,2)^n = 2$

$\log(1,2)^n = \log 2 \rightarrow n.\log(1,2) = \log 2$

Calculando o log(1,2)

$\log(1,2) = \log\left(\frac{12}{10}\right) = \log(2^2.3) - \log 10$

$\log(1,2) = 2.\log 2 + \log 3 - \log 10 = 0,08$

$n.\log(1,2) = \log 2 \rightarrow n = \frac{0,30}{0,08} = 3,75$ anos

0,75 ano = 0,75.12 meses = 9 meses

Letra C

QUESTÃO 08

O boato cresce exponencialmente na razão de 4 a cada minuto, partindo de um valor inicial igual a 1. Logo, população atingida pelo boato no tempo t é:

$P = P_0.(4)^n$

Para atingirmos uma população de 1.000.000 de pessoas.

$1000000 = 1.(4)^n \rightarrow \log 10^6 = \log 4^n$

$n.\log 2^2 = 6.\log 10 \rightarrow 2.n.\log 2 = 6$

$n.\log 2 = 3 \rightarrow n = \frac{3}{0,3} = 10$ minutos

Letra A

QUESTÃO 09

$M = C.(1+i)^n \rightarrow 0,35.C = C.(1-0,10)^n$

$0,35 = (0,9)^n \rightarrow \ln(0,35) = \ln(0,9)^n$

$\ln(0,35) = n.\ln(0,9) \rightarrow n = \frac{-1,050}{-0,105} = 10$ anos

Letra D

QUESTÃO 10

Como o desconto deve superar os 25%, o valor pago será inferior a 75%. Calculando-se 75% de R$820,00 obtemos R$605,00.

$V = P.(1+i)^n \rightarrow (1+i)^n = \frac{V}{P}$

$(1+0,0132)^n = \frac{820}{605} \rightarrow \ln(1,0132)^n = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

$n.\ln(1,0132) = -\ln\left(\frac{3}{4}\right) \rightarrow n = \frac{-0,2877}{-0,0131} = 21,96$

Logo, a parcela a ser antecipada será a de número 52.

Letra C

QUESTÃO 11

São t = 30 anos para que M = A/2.

$M = A.(2,7)^{k.t} \rightarrow \frac{A}{2} = A.(2,7)^{30.k}$

$(2,7)^{30.k} = \frac{1}{2}$

Para reduzirmos a quantidade a 10%:

$M = A.(2,7)^{k.t} \rightarrow \frac{A}{10} = A.[(2,7)^{30.k}]^{t/30}$

$\frac{1}{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/30} \rightarrow 2^{t/30} = 10 \rightarrow \log 2^{t/30} = \log 10$

$\frac{t}{30}.\log 2 = 1 \rightarrow t = \frac{30}{0,3} = 100$

Letra E

QUESTÃO 12

$I = I_0.(0,80)^{h/40} \rightarrow 0,32.I_0 = I_0.(0,80)^{h/40}$

$0,32 = (0,80)^{h/40} \rightarrow \log 0,32 = \log(0,80)^{h/40}$

$\frac{h}{40}.\log(0,80) = \log(0,32) \rightarrow h = \frac{40.\log(0,32)}{\log(0,80)}$

Calculando os logaritmos:

$0,32 = \frac{32}{100} = \frac{2^5}{10^2}$

$\log(0,32) = 5.\log 2 - 2.\log 10 = -0,50$

$0,80 = \frac{8}{10} = \frac{2^3}{10^1}$

$\log(0,80) = 3.\log 2 - \log 10 = -0,10$

$h = \frac{40.\log(0,32)}{\log(0,80)} = \frac{40.(-0,50)}{-0,10} = 200 \text{ cm} = 2 \text{ m}$

Letra C

QUESTÃO 13

A capitalização composta é a uma taxa de juros constante é dada pela expressão:

$$M = C.(1+i)^n$$

Teremos então:

$\begin{cases} M_1 = 5000.(1+0,50)^n \\ M_2 = 500.(1+1,00)^n \end{cases}$

Igualando as duas expressões:

$500.(1+1,0)^n = 5000.(1+0,50)^n$

Dividindo a igualdade por 500

$1.(2)^n = 10.(1,5)^n \rightarrow \frac{(2)^n}{(1,5)^n} = 10$

$\left(\frac{2}{3/2}\right)^n = 10 \rightarrow \log\left(\frac{4}{3}\right)^n = \log(10)$

$n.\log\left(\frac{2^2}{3}\right) = 1 \rightarrow n.(2.\log 2 - \log 3) = 1$

$n = \frac{1}{0,602 - 0,477} = \frac{1}{0,125} = 8$ anos

Letra A

QUESTÃO 14

Em 1986 tínhamos 100.000 transistores por 1/4 de cm^2, ou seja, 400.000 transistores por cm^2.
Como dobra a cada 2 anos:
$N(t) = 400000.(2)^{t/2}$
Vamos tomar N(t) = 100.000.000.000
$100000000000 = 400000.(2)^{t/2}$
$\frac{1000000}{4} = (2)^{t/2} \rightarrow \frac{10^6}{2^2} = (2)^{t/2}$
$\log\left(\frac{10^6}{2^2}\right) = \log(2)^{t/2}$
$\log(10^6) - \log(2^2) = \left(\frac{t}{2}\right).\log(2)$
$t = \frac{2.(6.\log10 - 2.\log2)}{\log2} = \frac{2.(6-0{,}60)}{0{,}30} = 36 \text{ anos}$
1986 + 36 = 2022
Letra C

QUESTÃO 15

São t = 8 dias para que $P = P_0/2$.
$P(t) = P_0.(e)^{-k.t} \rightarrow \frac{P_0}{2} = P_0.(e)^{-8.k}$
$(e)^{-8.k} = \frac{1}{2} \rightarrow (e)^{8.k} = 2 \rightarrow k = \frac{\ln2}{8}$
Para reduzirmos a quantidade a 1/10:
$P(t) = P_0.(e)^{-k.t} \rightarrow \frac{P_0}{10} = P_0.(e)^{-k.t}$
$\frac{1}{10} = (e)^{-k.t} \rightarrow e^{k.t} = 10 \rightarrow \log e^{k.t} = \log10$
$k.t.\ln e = \ln10 \rightarrow t = \frac{\ln10}{k} = \frac{8.\ln10}{\ln2}$
Letra D

QUESTÃO 16

Vamos tomar $x = 1{,}013^n$.
$\frac{5000.x.0{,}013}{x-1} = 400 \rightarrow 400.x - 400 = 65.x$
$400.x - 65.x = 400 \rightarrow x = \frac{400}{335}$
$1{,}013^n = \frac{400}{335} \rightarrow \log(1{,}013)^n = \log\left(\frac{400}{335}\right)$
$n.\log(1{,}013) = \log400 - \log335$
$n.0{,}005 = 2{,}602 - 2{,}525 \rightarrow n = \frac{0{,}077}{0{,}005} \approx 16$
Letra D

QUESTÃO 17

$X = 2^{100} \rightarrow \log X = \log 2^{100} = 100.\log2$
$\log X = 100\text{x}0{,}301 = 30{,}1 \rightarrow 31 \text{ algarismos}$
Letra C

QUESTÃO 18

25% de R$ 100.000,00 vale R$ 25.000,00.
$V = 100000.(0{,}8)^t \rightarrow 25000 = 100000.(0{,}8)^t$
$(0{,}8)^t = \frac{25000}{100000} = \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{1}{4}$
$t.(\log4 - \log5) = \log1 - \log4$
$t.(2.\log2 - \log5) = 0 - 2.\log2$
$t = \frac{-0{,}60}{0{,}60-0{,}70} = 6 \text{ anos}$
Letra C

QUESTÃO 19

O risco inicial é $R_0 = 2\% = 0{,}02$. Então:
$R(t) = R_0.(e)^{-k.t} \rightarrow 0{,}002 = 0{,}02.(e)^{-0{,}10.t}$
$(e)^{-0{,}10.t} = \frac{0{,}002}{0{,}02} = \frac{1}{10} \rightarrow (e)^{0{,}10.t} = 10 = e^{2{,}3}$
$0{,}10.t = 2{,}3 \rightarrow t = \frac{2{,}3}{0{,}10} = 23 \text{ anos}$
Letra C

QUESTÃO 20

Para t = 2 dias, temos que $P = 2.P_0$. Logo:
$P(t) = P_0.(5)^{k.t} \rightarrow 2.P_0 = P_0.(5)^{2.k} \rightarrow (5)^{2.k} = 2$
Para t = 6 dias:
$P(6) = P_0.(5)^{6.k} = P_0.[(5)^{2.k}]^3 = P_0.2^3 = 8.P_0$
Letra B

QUESTÃO 21

$1800 < 800.4^{0{,}02.t} < 2400$
Dividindo por 200:
$9 < 4.4^{0{,}02.t} < 12 \rightarrow 3^2 < (2^2)^{1+0{,}02.t} < 2^2.3$
$\log(3^2) < \log(2^2)^{1+0{,}02.t} < \log(2^2.3)$
$2.\log3 < (2 + 0{,}04.t).\log2 < 2.\log2 + \log3$
$0{,}96 < (2 + 0{,}04.t).0{,}30 < 1{,}08$
$96 < (2 + 0{,}04.t).30 < 108$
Simplificando por 6:
$16 < (2 + 0{,}04.t).5 < 18$
$16 < 10 + 0{,}20.t < 18$
$6 < 0{,}20.t < 8$
$30 < t < 36$
Letra A

QUESTÃO 22

$f(m) = g(2) \rightarrow 4.\log m = 3.\log2$
$\log m^4 = \log 2^3 \rightarrow m^4 = 2^3 \rightarrow m = 2^{3/4} = 2^{0{,}75}$
Letra B

QUESTÃO 23

A intensidade se reduz a metade a cada 3 cm, logo:

$$I = I_0 . (2)^{-x/3}$$

$\frac{I}{I_0} = (2)^{-x/3} \rightarrow \frac{I_0}{I} = (2)^{x/3} \rightarrow \frac{x}{3} = \log_2\left(\frac{I_0}{I}\right)$

$x = 3.\log_2\left(\frac{I_0}{I}\right) \rightarrow x = \log_2(\frac{I_0}{I})^3$

Letra A

QUESTÃO 24

Um crescimento de 8% ao ano pode ser descrito por uma PG de razão 1,08.

$$F(t) = F_0 . (1,08)^t$$

Logo, para dobrar o faturamento:

$F(t) = F_0 . (1,08)^t \rightarrow 2. F_0 = F_0 . (1,08)^t$

$2 = (1,08)^t \rightarrow \log 2 = \log(1,08)^t$

$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}08} = \frac{0{,}30}{0{,}04} = 7,5 \text{ anos}$

Obs.: $108 = 2^2.3^3$

$\log(1,08) = 2.\log 2 + 3.\log 3 - 2.\log 10 = 0,04$

Letra D

QUESTÃO 25

Após 20 rodadas teremos:

$F = 1000.(1,5)^{10}.(0,5)^{10} = 10^3.(0,75)^{10}$

$F = 10^3.(\frac{3}{4})^{10} = \frac{10^3.3^{10}}{2^{20}}$

$\log F = 3.\log 10 + 10.\log 3 - 20.\log 2$

$\log F = 3x1 + 10x0,477 - 20x0,301 = 1,75$

$\log F = 1,75 \rightarrow F = 10^{1,75}$

Pela tabela:

$10^{1,75} = 56 = F$

Letra C

QUESTÃO 26

Seja $q\colon \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ a função definida por $q(t) = q_0 \cdot e^{k \cdot t}$, em que q_0 é a quantidade inicial de C^{14} e $q(t)$ é a quantidade de C^{14} presente t anos após o instante inicial $(t = 0)$. Sabendo que a meia-vida do C^{14} é de 5730 anos, $q(5730) = \frac{q_0}{2} \Leftrightarrow \frac{q_0}{2} = q_0 \cdot e^{k \cdot 5730} \Leftrightarrow \ell n\ \frac{1}{2} = \ell n\ e^{5730 \cdot k}$

$-0,69 = 5730 \cdot k \Leftrightarrow k = -\frac{0,69}{5730}.$

Queremos calcular o valor de t para o qual $q(t) = 0,84 \cdot q_0.$

$0,84 \cdot q_0 = q_0 \cdot e^{-\frac{0,69}{5730} \cdot t}$

$\ell n\ 0,84 = \ell n\ e^{-\frac{0,69}{5730} \cdot t}$

$-0,17 = -\frac{0,69}{5730} \cdot t \Rightarrow t \cong 1411$ anos.

Letra D

QUESTÃO 27

Como a_1, a_2, a_3 é uma P.A, temos: $a_1 + a_3 = 2.a_2$

$$\log_2 x + \log_8 8x = 2.\log_4 4x$$

Escrevendo tudo na base 2, temos:

$$\log_2 x + \frac{\log_2(8x)}{\log_2 8} = \frac{\log_2(8x)}{\log_2 4}$$

Aplicando as propriedades dos logaritmos:

$$\log_2 x + \frac{\log_2 8 + \log_2 x}{3} = \frac{2.(\log_2 4 + \log_2 x))}{2}$$

Calculando os logaritmos e desenvolvendo a equação, temos: $\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$

Fazendo x = 8, temos:

$a_1 = \log_2 8 = 3$

$a_2 = \log_4 32 = \frac{5}{2}$

$a_3 = \text{lgo}_8 64 = 2$

Somando $a_1 + a_2 + a_3 = 3 + \frac{5}{2} + 2 = \frac{15}{2}$

Letra B

QUESTÃO 28

$d(t) = 50 \cdot (1 - e^{-0,1t})$

$25 = 50 \cdot (1 - e^{-0,1t})$

$1 - e^{-0,1t} = \frac{25}{50}$

$e^{-0,1t} = -\frac{1}{2}$

$\ln\ e^{-0,1t} = \ln\ 2^{-1}$

$-0,1 \cdot t \cdot \ln\ e = -1 \cdot \ln\ 2$

$0,1 \cdot t = 0,7$

$t = 7s$

Letra C

QUESTÃO 29

Mudando para a base 2, temos:

$\frac{\log_2 y}{\log_2 8} = \log_2 6$

$\frac{\log_2 y}{3} = \log_2 6$

$\log_2 y = 3.\log_2 6$

$\log_2 y = \log_2 6^3$

$y = 216$

Logo x = 216 /3 = 72 gotas.

Então $6 < \log_2 72 < 7$.

Letra D

QUESTÃO 30

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \log\left(\frac{8}{10}\right)^n = \frac{1}{10}$$

$n.(3.\log 2 - \log 10) = \log 1 - \log 10$
$n.(0,301 - 1) = -1$
$n.(-0,097) = -1$
$n \approx 10,309$
Logo, o número de filtros deverá ser 11.
Letra C

QUESTÃO 31

Fazendo M + w + = 7,3, temos:

$7,3 = -10,7 + \frac{2}{3} \cdot \log_{10} M_o$

$18 = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} M_o$

$27 = \log_{10} M_o$

$M_o = 10^{27}$

Letra E

QUESTÃO 32

Aplicando ℓn dos dois membros da equação, temos:

$\ell n(f(t)) = \ell n\left(9.e^{-\frac{t}{3}}\right) + 1$

$\ell n(f(t) - 1) = \ell n9 + \ell ne^{-\frac{t}{3}}$

$\ell n(f(t) - 1) - \ell n9 = -\frac{t}{3}\ell ne$

$\ell n\frac{f(t) - 1}{9} = -\frac{t}{3} \Leftrightarrow t = -3\ell n\frac{f(t) - 1}{9}$

$t = \ell n\left(\frac{f(t) - 1}{9}\right)^{-3} \Leftrightarrow t = \ell n\left(\frac{9}{f(t) - 1}\right)^3$

$g(x) = \ell n\left(\frac{9}{x - 1}\right)^3$

Letra A

QUESTÃO 33

Seja f a função definida por f(x) = logx, com x>0. Desse modo, $f(10^{100}) = \log 10^{100} = 100$ e, portanto, a função matemática que tem a propriedade citada é a logarítmica.

Letra B

QUESTÃO 34

$N(10) = 20.000(1 + K)^{10} = 24\ 000 \Rightarrow (1 + K)^{10} = 1,2$
$N(20) = 20000.(1+K)^{20}$
$N(20) = 20\ 000\left((1 + k)^{10}\right)^2$
$N(20) = 20\ 000.1,2^2$
N(20) = 28.800
Letra E

QUESTÃO 35

$M = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$

$\frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{10^{4,5}}\right) = 9$

$\log_{10}\left(\frac{E}{10^{4,5}}\right) = \frac{3 \times 9}{2}$

$10^{13,5} = \frac{E}{10^{4,5}}$

$E = 10^{18}$

Letra D

QUESTÃO 36

$8 = 7.e^{k(2025-2011)}$

$8 = 7.e^{14k}$

$\frac{8}{7} = e^{14.k} \Leftrightarrow \ell n\frac{8}{7} = \ell ne^{14.k}$

$14k = \ell n8 - \ell n7 \Leftrightarrow k = \frac{\ell n8 - \ell n7}{14}$

$9 = 7.e^{k(t-2011)} \Leftrightarrow \ell n\frac{9}{7} = \ell ne^{k(t-2011)}$

$\ell n9 - \ell n7 = k.\ell n.e^{(t-2011)}$

$\ell n9 - \ell n7 = k.(t - 2011)$

$\ell n9 - \ell n7 = \frac{\ell n8 - \ell n7}{14}.(t - 2011)$

$14.\frac{\ell n9 - \ell n7}{\ell n8 - \ell n7} = t - 2011$

$14.1,88 = t - 2011$

$t \simeq 2037,32$

Letra C

QUESTÃO 37

$y = n \cdot 2^x$
Fazendo y = 20n, temos:
$20n = n \cdot 2^x \Rightarrow \log 20 = \log 2^x$
$\log 2 + \log 10 = x \cdot \log 2$
$1,3 = 0,3x$
$x = 4,3333\ldots \text{horas}$
Letra B

QUESTÃO 38

$\frac{M}{N} = \frac{\log_{27} 196}{-\log_{\frac{1}{9}} 14} = \frac{\log_{3^3} 14^2}{-\log_{3^{-2}} 14}$

$\frac{M}{N} = \frac{\frac{2}{3}\log_3 14}{-\left(-\frac{1}{2}\right)\log_3 14} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}$

$\frac{M}{N} = \frac{4}{3}.$

Letra C

QUESTÃO 39

$Q = A \cdot (0,975)^t$

$\frac{A}{2} = A \cdot (0,975)^t$

$\ell n \frac{1}{2} = \ell n (0,975)^t$

$\ell n 1 - \ell n 2 = t. \ell n (0,975)$

$0 - 0,693 = t.(-0,025)$

$-0,693 = -0,025t$

$t \simeq 27,7.$

Letra C

QUESTÃO 40

Queremos calcular o valor de t para o qual:

$Q(t) = \frac{Q_0}{2}.$

Então, sabendo que $k = 0,04$ e considerando $\ell n\ 2 \cong 0{,}7$, obtemos

$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-0,04t} \Leftrightarrow 2^{-1} = e^{-0,04t}$

$\ell n\ 2^{-1} = \ell n\ e^{-0,04t}$

$-0,7 = -0,04t$

$t = \frac{0,70}{0,04}$

$t = 17,5$ anos.

Letra C

QUESTÃO 41

Condições de existência: $x + 1 > 0$ e $x^2 + 35 > 0$

$\log_{10}(x+1) + 1 = \log_{10}(x^2+35)$

$\log_{10}(x+1) + \log_{10} 10 = \log_{10}(x^2+35)$

$\log_{10}(10x+10) = \log_{10}(x^2+35)$

$10x + 10 = x^2 + 35$

$x^2 - 10x + 25 = 0$

$x = 5$ (verifica as condições de existência)

Letra B

QUESTÃO 42

Na tabela, o bacilo que causa diarreia é o Escherichia coli.

$50 = 10.2^n$

$2^n = 5$

$\log 2^n = \log 5$

n.log 2 = log 10 – log 2

n.0,3 = 1 – 0,3

n = 7/3

Logo, t = 1/(7/3) = 3/7 horas, aproximadamente 26 minutos.

Letra B

QUESTÃO 43

Fazendo x = 12,5, temos:

$\log\left(\frac{L}{15}\right) = -0,08 \cdot 12,5$

$\log\left(\frac{L}{15}\right) = -1 \to \frac{L}{15} = 10^{-1}$

$L = 1,5$ lumens.

Letra D

QUESTÃO 44

De acordo com os dados do problema, temos:

$T(t) = (T_0 - T_{AR}) \times 10^{-\frac{t}{12}} + T_{AR}$

$140 = (740 - 40) \times 10^{-\frac{t}{12}} + 40$

$100 = 700 \times 10^{-\frac{t}{12}}$

$10^{-\frac{t}{12}} = \frac{1}{7}$

$\log 10^{-\frac{t}{12}} = \log 7^{-1} \to -\frac{t}{12} = -\log 7$

$t = 12 \log 7$ minutos

Letra C

QUESTÃO 45

$T(x) = 10^{-1} \cdot T_0$

$10^{-1} \cdot T_0 = T_0 \cdot 0,5^{0,1x}$

$\log 10^{-1} = \log(0,5)^{0,1x}$

$-1 = 0,1x \cdot (\log 1 - \log 2)$

$-1 = 0,1x \cdot (0 - 0,3)$

$-1 = -0,03x$

$x = 33,3333...$

Logo, D = 34.

Letra C

QUESTÃO 46

Queremos calcular t para que $M(t) = 0,1 \cdot A$.

Sabendo que a meia-vida do césio-137 é 30 anos, encontramos

$M(30) = \frac{A}{2} \to A \cdot (2,7)^{k \cdot 30} = \frac{A}{2} \to (2,7)^k = 2^{-\frac{1}{30}}.$

Como, $\log_{10} 2 = 0,3$, então: vem

$A \cdot [(2,7)^k]^t = 0,1 \cdot A \Leftrightarrow \left(2^{-\frac{1}{30}}\right)^t = 10^{-1}$

$\log 2^{-\frac{t}{30}} = \log 10^{-1} \Leftrightarrow -\frac{t}{30} \cdot \log 2 = -1 \cdot \log 10$

$-\frac{t}{30} \cdot 0,3 \cong -1 \Rightarrow t \cong 100,$

ou seja, o resultado procurado é, aproximadamente, 100 anos.

Letra E

QUESTÃO 47

Se $(2^N)^N$ tem pelo menos 30 dígitos, então

$$
\begin{aligned}
(2^N)^N > 10^{29} &\Leftrightarrow \log 2^{N^2} > \log 10^{29}\\
&\Leftrightarrow N^2 \cdot \log 2 > 29 \cdot \log 10\\
&\Rightarrow 0,3 \cdot N^2 > 29\\
&\Rightarrow N^2 > 96,\overline{7}\\
&\Rightarrow N \geq 10.
\end{aligned}
$$

Portanto, o menor valor de N é 10.

Letra D

QUESTÃO 48

A raiz da função $y = \log(x+1)$ é tal que:

$\log(x+1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 10^0 \Leftrightarrow x = 0.$

O gráfico intersecta o eixo das abscissas no ponto $(0,\ 0)$.

Portanto, a alternativa correta é a [D], cujo gráfico passa pela origem.

Letra D

QUESTÃO 49

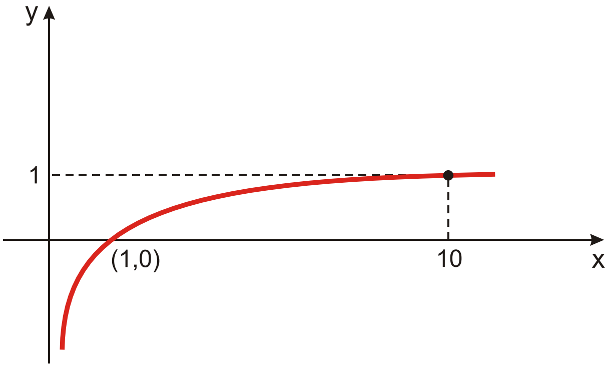
Sejam $a,\ b$ e c reais positivos, com $a \neq 1$ e $c \neq 1$.

$$
\begin{aligned}
\log_A B^3 \cdot \log_B A^2 &= 3 \cdot \log_A B \cdot 2 \cdot \log_B A\\
&= 6 \cdot \frac{\log_B A}{\log_B A}\\
&= 6.
\end{aligned}
$$

Observação: As condições $A \neq 1$ e $B \neq 1$ não foram observadas no enunciado.

Letra B

QUESTÃO 50



O gráfico da função y = log(x) é o que mais se aproxima da curva considerada.

Letra A

QUESTÃO 51

Lembrando que $\log_b a^c = c \cdot \log_b a$ e $\log_b b = 1$, com $a,\ b,\ c$ reais positivos e $b \neq 1$, temos

$$Q = 1 + 4 \cdot (0,8)^{2P} \Leftrightarrow \frac{Q-1}{4} = (0,8)^{2P}$$

$$\log_{0,8} \frac{Q-1}{4} = \log_{0,8}(0,8)^{2P}$$

$$2P = \log_{0,8} \frac{Q-1}{4}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \log_{0,8} \frac{Q-1}{4}$$

$$P = \log_{0,8} \sqrt{\frac{Q-1}{4}}.$$

Letra A

QUESTÃO 52

$$M = (4^{\log_5 9})^{\log_4 5} = (4^{\log_4 5})^{\log_5 9} = 5^{\log_5 9} = 9.$$

Letra B

QUESTÃO 53

No eixo x: 1 cm corresponde a 10 unidades;

No eixo y: 1 cm corresponde a:

(log1000)/15 = 3/15 = 1/5 unidades.

Logo, x/y = 50/1.

Letra C

QUESTÃO 54

$$Q(t) = Q_0 e^{-0,023t}$$

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 \cdot e^{-0,023 \cdot t}$$

$$\ell n\left(\frac{1}{2}\right) = \ell n e^{-0,023 \cdot t}$$

$$-\ell n 2 = -0,023 \cdot t$$

$$-0,69 = -0,023 \cdot t$$

$$t = 30$$

Letra B

QUESTÃO 55

$$M_2 - M_1 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_1}{E_0}\right) - \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_2}{E_0}\right)$$

$$M_2 - M_1 = \frac{2}{3}\log\frac{E_1}{E_2}$$

$$\log\frac{E_1}{E_2} = \frac{3}{2}(M_2 - M_1) \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{\frac{3}{2}(M_2 - M_1)}.$$

Portanto, sendo $M_2 - M_1 = 8,8 - 8,2 = 0,6 = \frac{3}{5}$, vem $1 = 10^0 < \frac{E_1}{E_2} = 10^{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{5}} = 10^{\frac{9}{10}} < 10.$

Letra D

QUESTÃO 56

Seja k, com $0 < k < 1$, a abscissa do ponto para o qual se tem $\log k = -\frac{h}{2}$, ou seja, $h = -2 \cdot \log k$. Assim, temos $\frac{h}{2} = \log(n+k)$, isto é, $h = 2 \cdot \log(n+k)$. Daí, vem

$$2 \cdot \log(n+k) = -2 \cdot \log k \Leftrightarrow \log(n+k) = \log \frac{1}{k}$$

$$k^2 + nk - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{-n + \sqrt{n^2+4}}{2}.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} h &= 2 \cdot \log(n+k) \\ &= 2 \cdot \log\left(n + \frac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right). \end{aligned}$$

Letra E

QUESTÃO 57

Sendo V_0 o volume inicial do líquido e V o volume após um determinado tempo t, podemos escrever a seguinte função com as informações do problema.

$$V = V_0 \cdot (0,96)^t$$

Admitindo que $V = \frac{V_0}{4}$, temos a seguinte equação na incógnita t.

$$\frac{V_0}{4} = V_0 \cdot (0,96)^t \Rightarrow \frac{1}{4} = (0,96)^t$$

$$2^{-2} = (0,96)^t \Rightarrow \log 2^{-2} = \log(0,96)^t$$

$$-2\log 2 = t \cdot \log\left(\frac{96}{100}\right)$$

$$-0,6 = t \cdot (\log 96 - \log 100)$$

$$-0,6 = t \cdot \left(\log(2^5 \cdot 3) - 2\right)$$

$$-0,6 = t \cdot (5 \cdot \log 2 + \log 3 - 2)$$

$$-0,6 = t \cdot (5 \cdot 0,3 + 0,48 - 2)$$

$$-0,6 = t \cdot (-0,02) \Rightarrow t = 30 \text{ horas}$$

Letra E

QUESTÃO 58

Determinando o aumento percentual depois de 60 minutos (1 hora), temos:

$$\begin{aligned} B(60) &= -30 \cdot \log_3(60+21) + 150 \\ &= -30 \cdot 4 + 150 = 30 \end{aligned}$$

Portanto, o número de bactérias após uma hora será dado por: $250 \cdot \left(1 + \frac{30}{100}\right) = 250 \cdot 1,3 = 325$

Letra A

QUESTÃO 59

$$B(t) = 5000 \Leftrightarrow 800 \cdot 2^{\frac{t}{40}} = 5000$$

$$2^{\frac{t}{40}} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\log 2^{\frac{t}{40}} = \log\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\frac{t}{40} \cdot \log 2 = 2 \cdot \log 10 - 4 \cdot \log 2$$

$$\frac{t}{40} \cdot 0,3 = 2 - 4 \cdot 0,3$$

$t \cong 106,67$ h.

Letra C

QUESTÃO 60

Pela equação de Clapeyron (da Química):

$PV = nRT$

P = pressão

V = volume

n = quantidade de matéria (nº mols)

R = constante universal dos gases

T = temperatura

Assim, percebe-se que pressão e volume são inversamente proporcionais: a pressão do gás é máxima quando o volume é mínimo. Como a função logarítmica dada é sempre crescente, o volume será mínimo quando o logaritmando for mínimo.

Ou seja: logaritmando $\rightarrow \left(5 + 2\ \text{sen}(\pi t)\right)$

$f_{\text{mín}}(t) = 5 + 2\ \text{sen}(\pi t) \rightarrow \text{sen}(\pi t)$ é mínimo

$$\pi t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow t = \frac{3}{2} + 2k \rightarrow t = \frac{3}{2} = 1,5$$

Letra D

QUESTÃO 61

$$8,9 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \Leftrightarrow \log\left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right) = 13,35$$

$$\log E - \log 7 \cdot 10^{-3} = 13,35$$

$$\log E = 13,35 + \log 7 - 3\log 10$$

$$\log E = 13,35 + 0,84 - 3$$

$E = 10^{11,19}$ kWh.

Letra B

QUESTÃO 62

Desde que x é um número inteiro positivo, temos:

$$\log_2(-x^2 + 32) = 4 \Leftrightarrow -x^2 + 32 = 16$$

$x^2 = 16.$

$x = 4.$

Letra B

QUESTÃO 63

Seja a função $p: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dada por $p(t) = p_0 \cdot (1,02)^t$, com $p(t)$ sendo a população do país após t anos. Logo, como queremos calcular t para o qual se tem $p(t) = 2 \cdot p_0$, vem

$2 \cdot p_0 = p_0 \cdot (1,02)^t \Leftrightarrow \log(1,02)^t = \log 2$

$t \cdot \log(1,02) = \log 2$

$t = \dfrac{\log 2}{\log 1,02}$

$t \cong \dfrac{0,301}{0,0086}$

$t = 35.$

Letra E

QUESTÃO 64

Número inicial no visor = x

Tecla B = 5x

$\text{Tecla } A = \log_{10}(5x)$

$\text{Tecla } B = 5 \cdot (\log_{10}(5x)) = 10$

$\log_{10}(5x) = 2 \to 5x = 10^2 \to x = \dfrac{100}{5} = 20$

Letra A

QUESTÃO 65

Aplicando os dados fornecidos temos:

$pH = -\log[H^+]$

$pH = -\log(2 \cdot 10^{-8})$

Aplicando a propriedade de produto dentro do argumento dos logaritmos:

$pH = -(\log(2) + \log(10^{-8}))$

Aplicando a propriedade dos expoentes:

$pH = -(\log(2) - 8 \cdot \log(10))$

Sabendo que $\log 2 = 0,3$ e $\log 10 = 1$:

$pH = -(\log(2) - 8 \cdot \log(10))$

$pH = -(0,3 - 8 \cdot (1))$

$pH = 7,7$

Letra D