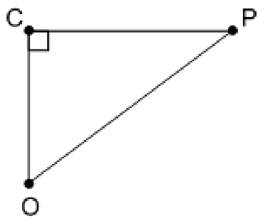
17

RESOLUÇÕES

GEOMETRIA ESPACIAL

QUESTÃO 01

Considere a figura, em que O é o centro da esfera, C é o centro da seção e P um ponto de interseção de S com a esfera.



Sabendo que a área da seção é igual a $16\pi\ \text{cm}^2$, temos que $\pi \cdot \overline{CP}^2 = 16\pi \Rightarrow \overline{CP} = 4$ cm.
Logo, como OP é o raio da esfera e $\overline{OC} = 3$ cm, então:
$\overline{OP}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CP}^2 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow \overline{OP} = 5$ cm.
Portanto, o volume da esfera é dado por

$$\frac{4\pi \cdot \overline{OP}^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 5^3}{3} = \frac{500\pi}{3}\text{cm}^3.$$

Letra E

QUESTÃO 02

R = raio da bexiga.
$500 = \frac{4\pi \cdot R^3}{3} \Leftrightarrow 500 = \frac{4 \cdot 3 \cdot R^3}{3} \Leftrightarrow R^3 = 125 \Leftrightarrow R = 5\text{cm}.$
Comprimento do círculo máximo:
$C = 2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30\text{cm}.$
Letra C

QUESTÃO 03

$$0{,}25 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 4^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4\right) = \frac{1}{4} \cdot 64\pi = 16\pi\text{cm}^3.$$

Letra A

QUESTÃO 04

Se r_0 é o raio da bolha, então sua área superficial é $4\pi r_0^2$. Logo, se sua área superficial fosse 44% maior, então seu raio, r, seria tal que $4\pi r^2 = 1{,}44.\ 4\pi r_0^2 \to r = 1{,}2r_0$
Portanto, ela poderia conter um volume de ar em seu interior, sem estourar, até $\frac{4}{3} \cdot \pi.r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi.(1{,}2r_0)^3 = 1{,}728.$ $\frac{4}{3} \cdot \pi.r_0^3$ ou seja, 72,8% maior.
Letra E

QUESTÃO 05

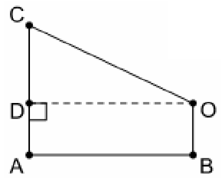
Sendo x é a elevação do nível da água em cm, podemos escrever

$$\pi \cdot 5^2 \cdot x = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3$$
$$x = \frac{36}{25}$$

Observação: Uma bola de diâmetro 6 não poderá ficar totalmente submersa num cilindro com altura 5 cm.
Letra A

QUESTÃO 06

Considere a figura.



Seja D o pé da perpendicular baixada de O sobre AC. Assim, como $\overline{CD} = 3\text{cm}$ e $\overline{CO} = 7\text{cm}$, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos $d^2 = 7^2 - 3^2 \Rightarrow d = 2\sqrt{10}\text{cm}.$
A resposta é $\frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}.$
Letra E

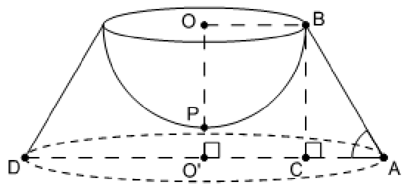
QUESTÃO 07

$$V_{\text{medicamento}} = 7 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{28\pi \cdot d^3}{24}$$
$$\frac{28\pi \cdot d^3}{24} = x \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{4}\right)^3 \Rightarrow \frac{28\pi \cdot d^3}{24} = \frac{4x \cdot \pi \cdot d^3}{192} \Rightarrow$$
$$\frac{28}{24} = \frac{4x}{192} \Rightarrow x = 56 \text{ gotas}$$

Letra D

QUESTÃO 08

Considere a figura abaixo.



Queremos calcular $h = \overline{PO'} = \overline{OO'} - \overline{OP}.$

Temos que $\overline{O'A} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{10}{2} = 5\text{ m}$ **e** $\overline{OB} = \frac{4}{2} = 2\text{ m} = \overline{O'C}.$

Logo, $\overline{AC} = \overline{O'A} - \overline{O'C} = 5 - 2 = 3\text{ m}.$

Do triângulo ABC, **vem que**

$$\text{tg}\hat{BAC} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 3 \cdot \text{tg}60° = 3\sqrt{3} \cong 3 \cdot 1{,}73 = 5{,}19\text{ m}.$$

Portanto, $h = 5{,}19 - 2 = 3{,}19 \cong 3{,}20\text{ m}.$

Letra C

QUESTÃO 09

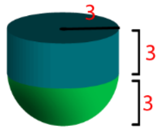
$$V_{\text{esferas}} = 10{,}5.\frac{4p.R^3}{3} = 14.p.R^3$$
$$V_{\text{cubo}} = L^3$$

$$V_{\text{cubo}} = L^3 \quad \to \quad 100\%$$
$$V_{\text{esferas}} = 14.p.R^3 \quad \to \quad 4{,}2\%$$

$$\frac{L^3}{14.3.R^3} = \frac{100\%}{4{,}2\%} \to \frac{L^3}{R^3} = \frac{4200\%}{4{,}2\%} = 1000 \to \frac{L}{R} = 10$$

Letra D

QUESTÃO 10



$$V_{total} = V_{Cilindro} + \frac{V_{Esf}}{2}$$

$$V_T = pR^2.H + \frac{1}{\cancel{2}}.\frac{\cancel{4}pr^3}{3}$$

$$V_T = p.3^2.3 + \frac{2.p.3^3}{3} = 27p + 18p \rightarrow V_T = 45p\ m^3$$

Letra E

QUESTÃO 11

$$n.\frac{4\pi \cdot R^3}{3} \leq \pi \cdot R^2.H$$

$$n.\frac{4\pi \cdot 1^3}{3} \leq \pi \cdot 5^2.1$$

$$n.4 \leq 3 \cdot 5^2.1$$

$$n \leq 18,75$$

n = 18 esferas.

Letra E

QUESTÃO 12

$$\frac{V_{Não\ Ocupado}}{V_{Esferas}} = \frac{V_{Cil} - 2.V_{Esf}}{2.V_{Esf}} = \frac{p.r^2.h - 2.\frac{4.p.r^3}{3}}{2.\frac{4.p.r^3}{3}} \rightarrow$$

$$\frac{p.r^2.4r - \frac{8.p.r^3}{3}}{\frac{8.p.r^3}{3}} \rightarrow \frac{\frac{12p.r^3 - 8.p.r^3}{\cancel{3}}}{\frac{8.p.r^3}{\cancel{3}}} = \frac{4pr^3}{8pr^3} = \frac{1}{2}$$

Letra D

QUESTÃO 13

Letra B

QUESTÃO 14

$$Vesfera = \frac{4\pi \cdot R^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 5,25^3}{3} = 606,37\ cm^3$$

$$Vbastão = \pi \cdot 0,7^2.50 = 77\ cm^3$$

$$Valtere = 2.606,37 + 77 = 1289,74\ cm^3$$

$$Maltere = 1289,74\ .7,8 = 10\ kg$$

Letra E

QUESTÃO 15

Volume gerado pela área hachurada é igual volume da semiesfera menos o volume do cilindro, logo:

Volume da semiesfera (V_1) : $V_1 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\pi.3^3 = 18.\pi$

Volume do cilindro (V_2) : $V_2 = \pi.1^2.1 = 1.\pi$

Volume gerado pela região hachurada :

$$V_1 - V_2 = 18.\pi - 1.\pi = 17.\pi$$

Letra D

QUESTÃO 16

Considerando que o raio da terra seja R, o volume da terra será dado por: $V_{Terra} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

De acordo com o texto o volume de Júpiter será dado por:

$$V_{Jupiter} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (11 \cdot R)^3$$

$$V_{Jupiter} = 1331 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

$$V_{Jupiter} = 1331 \cdot V_{Terra}$$

Letra E

QUESTÃO 17

O raio da circunferência no plano de corte, a distância do corte ao centro e o raio da esfera formam um triângulo retângulo do tipo 3/4/5. Portanto, o raio da esfera é igual a $5\ cm$.

Assim: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500\pi}{3}\ cm^3$

Letra E

QUESTÃO 18

Seja r, em mm, a medida do raio de uma esfera cujo volume é $500\ mm^3$.

$$500 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$r^3 = \frac{375}{\pi} = \frac{3 \cdot 5^3}{\pi}$$

$$r = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\ mm$$

Sendo t, o tempo em segundos, que o balão leva para atingir o volume $500\ mm^3$ nas condições dadas,

$$\frac{0,5\ mm}{1\ s} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\ mm}{t} \rightarrow t = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\ s$$

Letra E

QUESTÃO 19

O cilindro está inscrito no cubo, portanto:

I. $L_{cubo} = h_{cil} = 2R_{cil}$

II. O volume do cilindro é dado por:

$$V_{cil} = \pi R^2.(2R) \Rightarrow 54\pi = 2\pi R^3 \Rightarrow R = 3$$

III. Volume do cubo

$$V_{cubo} = L^3 \Rightarrow V_{cubo} = 6^3 \Rightarrow V_{cubo} = 216m^3$$

Letra C

QUESTÃO 20

Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico, a altura do frasco cilíndrico deverá ser tal que

$$\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2 \cdot h = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \Leftrightarrow h = 12R.$$

Letra E

QUESTÃO 21

Seja r o raio da esfera. Sabendo que o volume da esfera é $2304\pi\,cm^3$, temos $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = 2304\pi \Leftrightarrow r = 12cm.$

Portanto, a área da superfície de cada faixa é igual a $\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot r^2 = \frac{1}{6}\cdot\pi\cdot 12^2 = 24\pi\,cm^2.$

Letra B

QUESTÃO 22

A quantidade de madeira descartada corresponde ao volume do cilindro subtraído dos volumes da semiesfera e do cone. Portanto, o resultado é

$$\pi\cdot\left(\frac{6}{2}\right)^2\cdot 7-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(7-4)^3-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{6}{2}\right)^2\cdot 4 \cong 189-54-36$$
$$= 99\,cm^3.$$

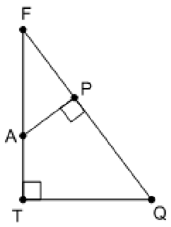
Letra E

QUESTÃO 23

Sendo o diâmetro do átomo de flúor menor do que o diâmetro do átomo de enxofre, podemos concluir que a vista superior correta é a apresentada na alternativa [B].

Letra B

QUESTÃO 24



Sabendo que a área da superfície esférica é igual à área do círculo de centro T e raio TQ, vem

$4\cdot\pi\cdot\overline{AP}^2 = \pi\cdot\overline{TQ}^2 \Leftrightarrow 4\cdot 3^2 = \overline{TQ}^2 \Rightarrow \overline{TQ} = 6dm.$

Logo, como FQ é tangente à esfera no ponto P, segue que $\overline{TQ} = \overline{PQ}$.

Da semelhança dos triângulos FTQ e FPA, obtemos

$\frac{\overline{FP}}{\overline{FT}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{TQ}} \Leftrightarrow \frac{\overline{FP}}{\overline{FT}} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \overline{FP} = \frac{1}{2}\cdot\overline{FT}.$

Finalmente, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo FPA, encontramos

$$\overline{FA}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{FP}^2$$
$$(\overline{FT}-\overline{AT})^2 = \overline{PA}^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\overline{FT}\right)^2$$
$$\overline{FT}^2 - 6\cdot\overline{FT} + 3^2 = 3^2 + \frac{1}{4}\cdot\overline{FT}^2$$
$$\overline{FT} = 8dm.$$

Letra C

QUESTÃO 25

V = Volume do porta-joias
V_c = Volume do cubo
V_e = Volume da esfera.
$V = V_c - V_e$

$$V = 10^3 - \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 4^3$$

V = 1000 – 256
V = 744 cm^3

Utilizando a densidade da madeira para encontrar a massa m do porta-joias.

$0,85 = \frac{m}{744} \Rightarrow m = 632,4\ g \simeq 632\ g$

Letra D

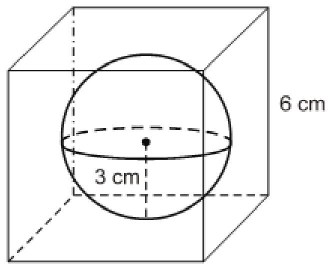
QUESTÃO 26

O volume total de sorvete é dado pela soma do volume da semiesfera de raio 6cm com o volume da casquinha, ou seja,

$$\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 6^3 + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 6^2\cdot 12 = 144\pi + 144\pi$$
$$= 288\pi\,cm^3.$$

Letra C

QUESTÃO 27



V(líquido) = V(cubo) – V(esfera)

V(líquido) = $6^3 - \frac{4\pi.3^3}{3}$ (considerando $\pi = 3,14$)

V(líquido) = 102,96cm^3

Número de peças com 1 Litro = $\frac{1000cm^3}{102,96cm^3} \simeq 9,7$

No máximo 9 peças.

Letra A

QUESTÃO 28

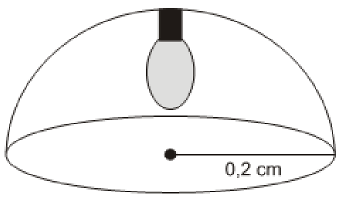
O artesão disporá de $8\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 10^3 cm^3$ de material ao derreter 8 esferas menores. Com esse material ele poderá construir uma esfera de raio r, tal que:

$\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = 8\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 10^3$

$r = \sqrt[3]{2^3\cdot 10^3} \Leftrightarrow r = 20cm.$

Letra D

QUESTÃO 29



Área de cada uma das partes (interna e externa):

$$A = 2.3,14.(0,2)^2 = 0,2512$$

Logo, o valor total será: 0,2512(40 + 10) = R$ 12,56.

Letra C

QUESTÃO 30

O volume (V) de uma esfera, em função do seu diâmetro (D), é dado por $V = \frac{\pi}{6} \cdot D^3$.

Se o diâmetro tem aumento de 1%, então o volume dessa esfera passa a valer

$$V' = \frac{\pi}{6} \cdot (1,01 \cdot D)^3 = 1,030301 \cdot \underbrace{\frac{\pi}{6} \cdot D^3}_{V} = 1,030301 \cdot V.$$

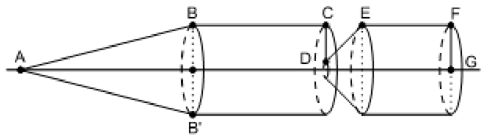
Portanto,

$$x\% = \frac{1,030301 \cdot V - V}{V} \cdot 100\% = \frac{0,030301 \cdot V}{V} \cong 3,03\% \in [3,\ 4).$$

Letra D

QUESTÃO 31

Girando a forma em torno do arame rígido, obtemos a figura abaixo.



Portanto, a decomposição do foguete, no sentido da ponta para a cauda, é formada pela seguinte sequência de sólidos: cone reto $(\overline{AB} = 4\overline{FG} \neq \overline{BB'} = 2\overline{FG})$, cilindro reto $(\overline{BC} = 3\overline{FG} \neq 2\overline{FG})$, tronco de cone e cilindro equilátero $(\overline{EF} = 2\overline{FG})$.

Letra C

QUESTÃO 32

Volume do cilindro $= \pi \cdot 12^2 \cdot 15$

$$\frac{4\pi \cdot R^3}{3} = \pi \cdot 12^2 \cdot 15 \Leftrightarrow R = 3\sqrt[3]{60}$$

Letra D

QUESTÃO 33

Trace a diagonal do cilindro, pois essa será o diâmetro da esfera e sabemos que h = D, então:

$8^2 = D^2 + D^2$

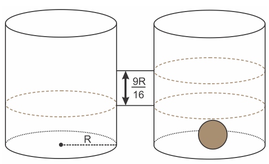
$D = 4\sqrt{2}$.

$V = A_b.h$.

$V = \pi\ (2\sqrt{2})^2.4\sqrt{2} = 32\pi\sqrt{2}\ cm^3$

Letra C

QUESTÃO 34



Considerando que x seja o raio da esfera e escrevendo que o volume da esfera é igual ao volume da água deslocada, logo: $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot x^3 = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{9R}{16} \Rightarrow x^3 = \frac{27R^3}{64} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \cdot R$

Letra C

QUESTÃO 35

Seja R a medida, em centímetros, do raio da esfera. Sendo V_E o volume da esfera, V_J o volume da jóia, V_P o volume da pirâmide ABCDE e V o volume de rocha retirado do cristal original, temos:

$$V_J = 2V_P = 9\sqrt{2}$$

$$2.\frac{1}{3}.\frac{(2R)^2}{2}.R = 9\sqrt{2}$$

$$R^3 = \frac{27\sqrt{2}}{4}$$

$$V_E = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4.3}{3}.\frac{27\sqrt{2}}{4} = 27\sqrt{2}$$

$$V = V_E - V_J = 27\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$$

Letra D

QUESTÃO 36

Aresta da cubo é igual a L.

Diâmetro da esfera circunscrita coincide com a diagonal do cubo, logo $L\sqrt{3}$.

$$\frac{\text{aresta do cubo}}{\text{diâmetro da esfera}} = \frac{L}{L\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Letra C

QUESTÃO 37

$$V_{esfera} = \frac{4\pi}{3} \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3} cm^3.$$

$$V_{cilindro} = V_{esfera}$$

$$\pi.4^2.h = \frac{32\pi}{3} \rightarrow h = \frac{2}{3} cm$$

$$h_{anterior} = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} cm$$

Letra D

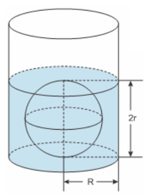
QUESTÃO 38

$13^2 = 12^2 + r^2$

$r = 5\ cm$

Letra E

QUESTÃO 39



Considerando a informação “Retira-se, então, a esfera e é observado que o nível da água é reduzido em $\frac{1}{4}$.", concluímos que o volume da esfera é a quarta parte do volume da água no cilindro.

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{1}{4}\pi \cdot R^2 \cdot 2r \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot R^2$$

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

Letra C

QUESTÃO 40

Seja r o raio da circunferência de centro C correspondente à latitude $30°$ N.

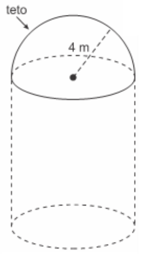
Logo, temos $\cos 30° = \frac{r}{6300} \Leftrightarrow r = 3150\sqrt{3}$ km.

Portanto, sendo $C\hat{P}Q = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$ rad, vem

$\overset{\frown}{PQ} = \frac{\pi}{3} \cdot 3150\sqrt{3} = 1050\pi\sqrt{3}$km.

Letra C

QUESTÃO 41



Calculando a área A do teto do reservatório, temos:

$$A = \frac{4 \cdot \pi \cdot 4^2}{2} = 32 \cdot \pi \simeq 32 \cdot 3,1 = 99,2\ m^2$$

Portanto, o valor pedido para a construção deste teto será:

$\text{valor} = 99,2 \cdot R\$\ 300 = R\$\ 29.760,00$

Letra E

QUESTÃO 42

Sabendo que a área lateral de um cilindro equilátero de raio r é dada por $4\pi r^2$, temos $4\pi r^2 = 16\pi \Rightarrow r = 2$cm. Portanto, sendo o raio da esfera inscrita igual ao raio do cilindro, podemos concluir que o volume da esfera é $\frac{4\pi}{3} \cdot r^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3}$cm^3.

Letra C

QUESTÃO 43

O volume de solvente deslocado corresponde ao volume do cilindro de raio $r$cm e altura igual a $2 \cdot 3 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$cm.

Logo, temos $\pi \cdot r^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 \Rightarrow r = 3\sqrt{6}$cm.

Letra D

QUESTÃO 44

O gasto em litros é dado por $\frac{4\pi \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2}{3} \cong 36.$

Letra C

QUESTÃO 45

$$V_{cilindro} = \pi R^2 \cdot h = 8\pi R^2$$
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R_e{}^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256}{3}\pi$$
$$V_{cilindro} = 0,75 \cdot V_{esfera}$$
$$8\pi R^2 = 0,75 \cdot \frac{256}{3}\pi \rightarrow R^2 = 8 \rightarrow R = 2\sqrt{2}$$
$$S_{lateral} = 2\pi R \cdot h = 2\pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 8 = 32\sqrt{2}\pi\ cm^2$$

Letra C