4

RESOLUÇÕES

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

QUESTÃO 01

O tempo gasto com as digitações foi igual a $30 \cdot 4 = 120$ segundos. Ademais, como ele errou as três primeiras tentativas, teve que esperar $60 + 120 + 240 = 420$ segundos. Portanto, a resposta é $120 + 420 = 540$ segundos.

Letra C

QUESTÃO 02

Tem-se que o valor à vista é dado por

$$\frac{202}{1,01} + \frac{204,02}{(1,01)^2} = 200 + 200$$
$$= \text{R\$ } 400,00.$$

Letra B

QUESTÃO 03

Se $M = \text{R\$ } 400,00$ é o montante desejado e n é número mínimo de meses necessário, então

$$400 = 200(1 + 0,05)^n \Leftrightarrow (1,05)^n = 2$$
$$\Leftrightarrow \log(1,05)^n = \log 2$$
$$\Leftrightarrow n \cdot \log(1,05) = \log 2$$
$$\Rightarrow n \cong \frac{0,3}{0,02}$$
$$\Rightarrow n \cong 15.$$

Portanto, a pessoa deverá optar pelo Plano B.

Letra B

QUESTÃO 04

Primeiramente note que a razão da progressão geométrica em questão é de: $r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{2} = 2$

E as questões que ele acertou são:

$21,\ 24,\ 27,\ 30,\ 33,\ 36,\ 39$ e $35,\ 40,\ 45,\ 50$

Logo, note que duas novas progressões aritméticas com razões três e cinco (respectivamente) foram formadas. Devemos calcular ambas as progressões.

Sabendo que, na primeira sequência, o primeiro termo é $a_{21} = 2^{20}$ e $a_{35} = 2^{34}$ e assim:

$$S1 + S2 = (2^{20} + 2^{23} + 2^{26} + 2^{29} + 2^{32} + 2^{35} + 2^{38}) + (2^{34} + 2^{39} + 2^{44} + 2^{49})$$

Observe que a primeira sequência terá razão igual a 2^3 e a segunda igual 2^5 e assim temos:

$$S1 + S2 = \frac{2^{20}((2^3)^7 - 1)}{2^3 - 1} + \frac{2^{34}\left((2^5)^4 - 1\right)}{2^5 - 1}$$

$$S1 + S2 = \frac{2^{20}(2^{21} - 1)}{2^3 - 1} + \frac{2^{34}(2^{20} - 1)}{2^5 - 1}$$

$$S1 + S2 = \frac{2^{20}(2^{21} - 1)}{2^3 - 1} + \frac{2^{34}(2^{20} - 1)}{2^5 - 1}$$

Letra D

QUESTÃO 05

Considerando que a quantidade de medicamento se reduz à metade a cada 3 horas, podemos elaborar a seguinte tabela:

Horário	Quantidade do fármaco
8h	60 mg
11h	30 mg
14h	15 mg
17h	7,5 mg
20h	3,75 mg
23h	1,875 mg

Letra B

QUESTÃO 06

Calculando:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = \pi r^2 + \dfrac{5xy}{3} \\ A_2 = \pi \dfrac{r^2}{4} + \dfrac{5xy}{12} \end{array}\right\} \Rightarrow PG \Rightarrow q = \frac{1}{4}$$

$$S_{30} = \frac{A_1 \cdot \left(\frac{1}{4^{30}} - 1\right)}{\frac{1}{4} - 1}$$

$$S_{30} = \frac{A_1 \cdot \left(\frac{1 - 4^{30}}{4^{30}}\right)}{-\frac{3}{4}}$$

$$S_{30} = \frac{-4A_1}{3} \cdot \left(\frac{1 - 4^{30}}{4^{30}}\right)$$

$$S_{30} = \frac{A_1}{3}\left(\frac{4^{30} - 1}{4^{29}}\right)$$

Letra A

QUESTÃO 07

P.G. $(x,\ y,\ z)$ de razão $q > 1$, como o triângulo é retângulo, podemos escrever que:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$\sqrt{\sqrt{5} - 1}^{\,2} + \left(q \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 1}\right)^2 = \left(q^2 \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 1}\right)^2$$

$$q^4 - q^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow q = \pm\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

Sabemos que $q > 0$, portanto:

$$q = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}$$

Logo,

$$y = \sqrt{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} = \sqrt{2}$$

Letra A

QUESTÃO 08

Seja C o capital aplicado. Logo, sabendo que o montante resgatado foi de R$ 65.536,00, temos:

$65536 = C \cdot (1,01)^4 \cdot (1,02)^4$

$\Leftrightarrow C = \dfrac{4^8}{1,0302^4}$

$\Leftrightarrow C = \left(\dfrac{4}{\sqrt{1,0302}}\right)^8$

$\Rightarrow C \cong 3,94^8$.

Por conseguinte, podemos afirmar que o capital aplicado, em reais, foi aproximadamente igual a $3,96^8$.

Letra E

QUESTÃO 09

Sabemos que para $t = 1$ se tem $V = 4,5$.

Logo, o valor de k é tal que:

$4,5 = 3 \cdot k \Leftrightarrow k = 1,5$.

Portanto, o número de unidades vendidas, em milhões, no mês de março, é dado por:

$V = 4,5 \cdot 1,5 = 6,75$.

Letra E

QUESTÃO 10

Calculando os comprimentos dos segmentos destacados e sua soma:

$$\left.\begin{aligned} seg_1 &= \frac{4}{2} = 2 \\ seg_2 &= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ seg_3 &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1 \end{aligned}\right\} \text{PG razão } q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_\infty = \frac{2}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 4 + 2\sqrt{2}$$

Letra D

QUESTÃO 11

Considerando que se perdeu peso em progressão geométrica de razão (q) dois e soma 1023 temos:

$S = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

$1023 = 1 \cdot \dfrac{2^n - 1}{2 - 1}$

$1023 = 2^n - 1$

$2^n = 1024 \quad \Rightarrow 2^n = 2^{10} \quad \Rightarrow n = 10$

Letra C

QUESTÃO 12

Área do círculo maior: $A = \pi \cdot 1^2 = \pi$

O raio do segundo círculo é $\frac{1}{2}$ do raio do primeiro, portanto a segunda área será: $A_2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$

A sequência das infinitas áreas é uma P.G. de razão:

$q = \dfrac{1}{4}$

Daí, a soma dos infinitos termos desta sequência será dada por: $S = \frac{\pi}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4\pi}{3}$

Letra E

QUESTÃO 13

Como o número de esferas acrescentadas a cada etapa cresce segundo uma progressão geométrica de razão 2, segue que, após n etapas, o volume ocupado pelas esferas é igual a $0,5 \cdot 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$. Daí, o número de etapas necessárias para que o volume total de esferas seja maior do que o volume do recipiente é tal que

$$0,5 \cdot 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} > 40 \cdot 25 \cdot 20 \Leftrightarrow 2^n > 40 \cdot 1000 + 1$$
$$\Rightarrow 2^n > 40 \cdot 2^{10} + 1.$$

Como $2^5 < 40 < 2^6$, segue que $n = 16$.

Letra B

QUESTÃO 14

A sequência é uma P.G. de razão $\frac{5}{9}$:

$$\left(1, \frac{5}{9}, \left(\frac{5}{9}\right)^2, \left(\frac{5}{9}\right)^3, \left(\frac{5}{9}\right)^4, \ldots\right)$$

O quinto termo é: $\left(\frac{5}{9}\right)^4 = \frac{625}{6561}$.

Letra E

QUESTÃO 15

Em 2013 o valor é de 84 milhões de dólares.

Com isso, admitindo que a_n seja o valor do quadro no ano n, temos:

$a_{2013} = a_{1953} \cdot q^{60}$

$84 \cdot 10^6 = 84 \cdot q^{60}$

$q^{60} = 10^6$

$q^{20} = 10^2$.

$a_{2033} = a_{2013} \cdot q^{20} = 84 \cdot 10^6 \cdot 10^2 = 8,4 \cdot 10^9$

Letra B

QUESTÃO 16

Seja x o número procurado.

$(-5 + x)^2 = (-9 + x) \cdot (3 + x)$

$25 - 10x + x^2 = -27 - 6x + x^2$

$x = 13$, ou seja, um primo ímpar menor do que 15.

Letra C

QUESTÃO 17

Os comprimentos das ramificações, em metros, constituem a progressão geométrica: $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots\right)$,
Cujo primeiro termo é 1 e a razão vale ½.
Queremos calcular a soma dos dez primeiros termos dessa sequência, ou seja,

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{1-q^{10}}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right).$$

Letra C

QUESTÃO 18

O valor de cada uma das questões, em ordem crescente, é: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8 e 2^9.
Portanto, se um participante obteve 213 pontos, então ele acertou as questões 1, 3, 5, 7 e 8.
Letra D

QUESTÃO 19

(1,3,9, ...) temos uma P.G de razão 3. A soma das áreas na hora k será:

$$S = \frac{1.(3^k - 1)}{3-1} = \frac{3^k - 1}{2}$$

Letra A

QUESTÃO 20

Como o valor apostado é sempre o dobro do valor da semana anterior, sendo x a aposta inicial, temos:
x + 2x + 4x + 8x + 16x = 2325
31x = 2325
x = 75
Com isso, o valor pago por Cecília, no jogo da primeira semana foi de 75 reais.
Letra A

QUESTÃO 21

A partir do enunciado, vemos que é uma PG, em que o a1 = 1 e a razão equivale a 2. Com isso, a soma dos n primeiros termos é:

$$S = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S = 1 . \frac{(2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$S = 2^n - 1$$

Contudo, para n = 9, $S = 2^9 - 1 = 511$.
Já para n = 10, $S = 2^{10} - 1 = 1023$. Com isso, para 515 contas, Marlene poderá fazer 9 fileiras completas.
Letra C

QUESTÃO 22

Analisando as informações do enunciado, percebemos que se a pessoa pagará 20% sobre o saldo devedor após lançar os 10% de juros, então 80% ficará como dívida.
Com isso, temos:
No 1º mês → (1 – 0,2).(1,1.x) = $0{,}88^1$.x
No 2º mês → (1 – 0,2).1,1.$(0{,}88)^1$.x = $0{,}88^2$.x
No 3° mês → (1 – 0,2).1,1. $0{,}88^2$.x = $0{,}88^3$.x
...
No 12° mês → (1 – 0,2).1,1. $0{,}88^{11}$.x = $0{,}88^{12}$.x
Logo, efetuados 12 pagamentos, a dívida será de $0{,}88^{12}$.x.
Letra C

QUESTÃO 23

Sendo uma aplicação que rende juros de 10% ao ano, temos uma P.G, em que o primeiro termo é R$1000,00, a razão é de 1,1 e o n-ésimo termo é R$1.000.000,00.
Com isso, temos:

$$1000000 = 1000.1,1^{n-1}$$

$$1000 = 1,1^{n-1}$$

$$\log(1000) = \log(1,1)^{n-1}$$

$$3.\log(10) = (n - 1).\log(1,1)$$

$$3 = (n - 1).(\log(11) - \log(10))$$

$$3 = (n - 1).(0,04)$$

$$n - 1 = \frac{3}{0,04} = 75 \rightarrow n = 76$$

Como R$ 1000000,00 é o 76° termo, então após ¾ de século, alcança o objetivo.
Letra E

QUESTÃO 24

O produto pedido é equivalente a:

$$2^0.2^1.2^2.2^3.2^4.2^5.2^6.2^7 = 2^{(0+7).4} = 2^{28}.$$

Letra D

QUESTÃO 25

Como o segundo gráfico tem uma configuração alterada dos retângulos, porém com as mesmas áreas, a soma infinita, analisando a partir do gráfico II, temos:

$$S = 1.1 + 1.\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{4} + 1.\frac{1}{8} + \cdots$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Como o primeiro termo é 1 e a razão é ½, segue:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Letra B

QUESTÃO 26

Como a população dobra a cada 20 minutos e a população inicial era de 1000 bactérias por mililitro, temos:

$B = B_0 . 2^n$

$4,096 . 10^6 = 1\,000 . 2^n$

$4096 = 2^n$

$2^{12} = 2^n$

$n = 12$

Como $20\text{min} = \frac{1}{3}$ h, o tempo do experimento foi de:

$12 . \left(\frac{1}{3}\right) = 4\text{ h}$

Letra D

QUESTÃO 27

Sejam a e b os catetos dos triângulos formados. A área dos triângulos é calculada como:

$s = \frac{a . b}{2}$

A cada novo triângulo, os catetos são reduzidos à metade e a nova área será:

$s' = \left(\frac{a}{2}\right) . \left(\frac{b}{2}\right) . \frac{1}{2} = \frac{a . b}{8} = \frac{s}{4}$

Portanto, como queremos a soma de 78 termos, pode-se aproximar com a soma de uma PG infinita, de termo inicial $s = \frac{(3.4)}{2} = 6$ e de razão $q = \frac{1}{4}$, cuja soma dos termos é calculada pela expressão:

$\text{SOMA} = \frac{s}{1 - q} = \frac{6}{1 - \frac{1}{4}}$

Portanto, soma $= 8$.

Letra A

QUESTÃO 28

Seja a P.G.: {2, 2.q, 2.q², 2.q³}.

Logo, podemos escrever:

$2 + 2q + 2q^2 + 2q^3 = 30$

$2q + 2q^2 + 2q^3 = 28$

$q + q^2 + q^3 = 14$

$q + q^2 + q^3 - 14 = 0$

Com isso, uma das possíveis raízes é q = 2, então o segundo recebeu 4 km².

Letra C

QUESTÃO 29

Sabendo que o primeiro cubo teria volume a³, percebemos que como a aresta do cubo seguinte é a metade da aresta do cubo anterior, teríamos que os volumes dos próximos cubos seriam de:

$V_2 = \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{8}$

$V_3 = \left(\frac{a}{4}\right)^3 = \frac{a^3}{64}$

Com isso, notemos que a razão entre os volumes é de 1/8 e o primeiro termo é a³, com isso temos que a soma dos volumes será de:

$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{a^3}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{a^3}{\frac{7}{8}} = \frac{8a^3}{7}$

Letra D

QUESTÃO 30

Sendo a_1 = 2000 cabeças, então o ano de 2006 seria o a_{10}, contudo, analisando a tabela, a razão entre um ano e outro é de 0,8, com isso, temos:

$a_{10} = a_1 . q^{10-1}$

$a_{10} = 2000 . 0,8^9 = 2 . 10^3 . \left(\frac{2^3}{10}\right)^9 = 2 . 2^{27} . 10^3 . 10^{-9}$

$a_{10} = 2^{28} . 10^{-6}$

Contudo, $2^{10} \cong 10^3$, dessa forma, segue:

$a_{10} \cong (2^{10})^2 . 2^8 . 10^{-6} = (10^3)^2 . 256 . 10^{-6} \cong 256$

Portanto, está entre 100 e 400.

Letra C